

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

**(ДВФУ)**

|  |
| --- |
| **ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  **Департамент математического и компьютерного моделирования** |

**Реферат**

по дисциплине

«Уравнения математической физики»

по теме:

«Метод Фурье для вынужденных колебаний струны

(с подвижными концами)»

направление подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

направление образовательной программы

«Сквозные цифровые технологии»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил студент  гр. Б9119-02.03.01сцт  Петров С.Д.  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
|  | *(Ф.И.О.) (подпись)*  Проверил  Алексеев Г. В.  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  «01»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2023г. |
|  | февраля |

г. Владивосток

2023

**Оглавление**

[**1. Волновые уравнения 3**](#_Toc125918318)

[**2. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны 4**](#_Toc125918319)

[**3. Вынужденные колебания струны с подвижными концами 7**](#_Toc125918322)

1. Волновые уравнения

Волновое уравнение – линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее колебания струны, мембраны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах.

Общий вид:

Здесь:

Рассмотрим однородное волновое уравнение:

Данное уравнение называется уравнением колебаний струны, или же уравнение продольных колебаний стержня. Оно описывает то, что сила(вторая производная по времени) пропорциональна кривизне(вторая производная по координате). Впервые оно почти одновременно появилось в работах Д.Бернулли, Ж. Л. Д`Аламбера и Л. Эйлера.

***Комментарий:***

*Тейлор установил,, что сила, действующая на бесконечно малый элемент струны, пропорциональна второй производной по координате, но рассматривал только одномерный вариант задачи.*

*Д’Аламбер в дальнейшем стал рассматривать зависимость отклонения струны от времени. Это позволило применить второй закон Ньютона. Он переформировал закон и написал уравнение в современном виде.*

Примечательно, что Бернулли получил решение в виде тригонометрического ряда, а Д’Аламбер и Эйлер в виде прямой и обратной волн. Позже Фурье доказала эквивалентность этих решений.

1. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны

Метод Фурье является одним из распространенных методов решения уравнений с частными производными.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длины , закрепленной на концах, за время T, где . Такая задача сводится к одномерному волновому уравнению в области .

Добавим граничные условия:

Предположим, что решение существует и единственно. Будем искать частное ненулевое решение, удовлетворяющее граничным условиям в виде произведения.

Подставляя в уравнение получим:

Разнесем функции одинаковых переменных по разные стороны, разделив обе части на . (ошибки не будет, так как X,T ненулевое решение и скорость строго больше нуля)

Так как части зависят от разных переменных, то обе части равны одной и той же постоянной. Обозначим эту переменную через . Тогда из равенства получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Чтобы получить нетривиальные решения, необходимо найти нетривиальные решения для граничных условий.

Таким образом, необходимо найти значения параметра , которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, а также граничным условиям.

Рассмотрим 3 случая.

Общее решение имеет вид:

Где произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

Получим:

Определитель системы отличен от нуля, отсюда . Значит . Т.е. при не существует нетривиального решения.

Общее решение имеет вид:

Граничные условия:

Определитель системы отличен от нуля, отсюда . Значит . Т.е. при не существует нетривиального решения.

Общее решение имеет вид:

Где произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

Граничные условия:

Из первого условия видно, что , из второго получаем . Необходимо считать .

Приходим к равенству Т. е. .

Таким образом, получим

Подставим вместо значения и запишем решение второго уравнения.

Где произвольные постоянные.

Получим решение в виде:

То же самое справедливо для любой линейной комбинации функций, а также ряда:

Остается определить так, чтобы выполнялись начальные условия:

Продифференцируем найденное решение по :

Получим второе граничное условие:

Полученные формулы граничных условий представляют разложения функций в ряд Фурье по синусам на интервале . Постоянные можно выразить через формулы:

3. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Задача колебаний струны с подвижными концами сводится к решению неоднородного волнового уравнения:

удовлетворяющего краевым условиям:

Для нахождения решения задачи сведем ее к задаче с однородными краевыми условиями, а далее решим как задачу с закрепленными концами. Для этого введем вспомогательную функцию:

Видно, что функция удовлетворяет граничным условиям . Таким образом, решение задачи можно представить как:

Получим новую искомую функцию , из линейности становится очевидно, что она удовлетворяет граничным условиям: